

Leçon 223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeur d'adhérence. Exemples et applications.

[Amr] : *Suites et séries*, Mohammed El Amrani

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-François Dantzer

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Rom] : *Analyse réelle*, Jean-Étienne Rombaldi

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

I Partie A - Simple, basique

I.1 Suites et convergence [Amr] [Dan]

■ **Déf 1 (Suite réelle ou complexe) :**

■ **Ex 2 :** Suite arithmétique, géométrique.

■ **Ex 3 :** Séries

■ **Ex 4 :** Voir exos [Amr].

■ **Déf 5 (Convergence) :**

■ **Prop 6 (Unicité de la limite) :**

■ **Ex 7 :** Suites dans $\mathbb{Z}$ convergente.

■ **Ex 8 :** Voir exos [Amr].

■ **Prop 9 (Convergence et caractère borné) :**

■ **Thm 10 (Opération sur les limites) :**

I.2 Extraire pour converger : valeurs d'adhérences [Amr] [Dan]

■ **Déf 11 (Suite extraite) :**

Rem 12 : $\varphi(n) \geq n$.

■ **Ex 13 :** Voir [Amr].

■ **Déf 14 (Valeur d'adhérence) :**

■ **Prop 15 (Limite et sous-suite) :**

■ **Prop 16 (Expression de l'ensemble des VA) :**

App 17 (VA d'une suite périodique) :

I.3 Une généralisation de convergence : Cesaro [Amr]

■ **Thm 18 (Cesaro) :**

■ **Ex 19 :** Voir [Amr].

I.4 Accélération de convergence : une méthode à la Romberg-Richardson [Dan] [Rom]

II Partie B - Comparaison et valeurs d'adhérences

II.1 Comparaison de suites et séries [Amr]

■ **Prop 20 (Inégalités) :**

■ **Prop 21 (Comparaison de suites) :**

■ **Prop 22 (Comparaison de séries) :**

■ **Ex 23 :** Comparaison de Riemann, voir exos [Amr].

II.2 Techniques réelles : trop complexe ? [Amr] [Dan]

■ **Thm 24 (Gendarmes) :**

■ **Prop 25 (Suite monotone et bornée) :**

■ **Ex 26 :** limsup et liminf,

App 27 (liminf et VA) :

■ **Déf 28 (Suite adjacente) :**

■ **Thm 29 (Convergences des suites adjacentes) :**

■ **Ex 30 (e irrationnel) :**

App 31 (CSSA) :

II.3 Suites de Cauchy : converger vers l'inconnu [Amr] [Dan]

■ **Déf 32 (Suites de Cauchy) :**

■ **Prop 33 (Propriétés classiques) :**

Thm 34 (Complétude de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) :

II.4 Compacité : trouver de la convergence [Dan]

Thm 35 (Bolzano-Weierstrass) :

Rem 36 : Reformulation avec le caractère bornée.

Prop 37 (Compacité et VA) :

III Partie C - Suites récurrentes, la 226 s'invite

III.1 Suites récurrentes [Gou]

Déf 38 : Une suite $(u_n)_n$ est dite récurrent d'ordre 1 si on peut écrire : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ex 39 : $u_{n+1} = u_n^2$.

Déf 40 : Une suite $(u_n)_n$ est dite récurrent d'ordre p si on peut écrire : $u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, \dots, u_n)$.

Ex 41 : Suite de Fibonacci : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

III.2 Théorèmes de points fixes [Ber-Ber] [Rom]

Thm 42 (Point fixe de Banach-Picard) :

Contre-Ex 43 :

Prop 44 : Si $f : E \rightarrow E$ est telle que f^p soit contractante, alors elle admet un unique point fixe, limite de toute orbite.

 **Dév 45 (Point fixe sur les compacts) :**

 **Dév 46 :** Si $a = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{1/d}$, la fonction $f : x \in [0, a] \rightarrow x - x^{d+1} \in [0, a]$ admet un unique point fixe 0, et pour toute suite d'itérées (x_n) telles que $x_0 \neq 0$, on a $x_n \equiv 1/(dn)^{1/d}$.

Prop 47 : Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est continue ou croissante, alors elle admet au moins un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Contre-Ex 48 : $f(x) = \mathbb{1}_{[0,0.5]}(x)$ n'a pas de points fixes.

Ex 49 : $\cos(x)$ possède un point fixe dans $[0, 1]$.

Prop 50 : Si $f : I \rightarrow I$ est croissante, alors la suite $f^n(x_0)$ est monotone (suivant si $f(x_0) \geq x_0$ ou non). Si I est borné, alors les itérés convergent et si de plus f est continue, la limite est un point fixe.

III.3 Application aux développements asymptotiques [Rom]

Prop 51 (Propriétés classiques) :

Prop 52 (Développement asymptotique d'un itéré) :

Ex 53 : Exemple du log, arctan ou autre.

IV Partie D - Des applications

IV.1 Méthode à tomber dans les pommes [Sch] [Dem]

Thm 54 (Newton) :

Ex 55 : Calcul de racine de 2.

Rem 56 : Méthode de la sécante.

IV.2 Approximation d'irrationnels

Thm 57 (Approximation diophantienne) :

Ex 58 :

App 59 (Nombres de Liouville) :

IV.3 EDO : allons-y étape par étape [Dem]

Déf 60 (Méthode de pas 1) :

Ex 61 : Voir [Dem].

Thm 62 (Convergence d'Euler) :